Uitwerkingen Calculus 2 tentamen d.d. 28 juni 2007

Keimpe Nevenzeel

1.a Vul de volgende definitie aan: Een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet convergent als …

er een $b < \infty$ bestaat z.d.d. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b$.

1.b. Toon aan dat voor $|r| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Beschouw de partiele som $s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n$, dan $rs_n = r + r^2 + r^3 + ... + r^{n+1}$.
Als we rs_n van s_n aftrekken krijgen we:

$$s_n - rs_s = 1 + (r-r) + (r^2 - r^2) + ... + (r^n - r^n) - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}.$$

Aan beide kanten delen door $(1-r)$ geeft:

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

We hebben dan

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

waar we gebruik maakten van het feit dat $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ als $r < 1$.

Maar er geldt ook $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$, dus $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.
QED

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

a. Bepaal de convergentiestraal *R*.
We gebruiken de Ratio Test:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right| = |x-3|\left|\frac{n}{n+1}\right| \to |x-3| \quad \text{voor } n \to \infty.$$

Volgens de Ratio Test geldt als $|x-3| < 1$ dan is er convergentie en als $|x-3| > 1$ dan is er divergentie $\Rightarrow$ de Radius of Convergence is 1.

b. Bepaal alle (reële) *x* waarvoor de bovenstaande machtreeks convergeert.

Als $|x-3|<1$ convergeert de reeks sowieso, dat is dus voor $x\in(2,4)$. Nu moeten we nog bepalen of de eindpunten ook convergeren.

Voor $x=2$ krijgen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Dit is een alternerende reeks, dus we gebruiken de Alternating Series Test. Definieer $b_n = n^{-1}$, dan

(i) Moeten we controleren of $b_n > b_{n+1}$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Aan dit criterium is dus inderdaad voldaan.

(ii) Moet $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Aan dit criterium is voldaan

Dus voor $x=2$ convergeert de reeks.

Als $x=4$ krijgen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Deze reeks divergeert.

Dus voor $x\in[2,4)$ is er sprake van convergentie.

3. De functie *f* wordt gegeven door

$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

waarbij $(x,y)\neq(0,0)$.

a. Toon aan dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **niet bestaat.**

Als $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat dan moet de waarde van deze limiet niet afhangen van het pad dat je kiest om de limiet te benaderen. In anderen woorden: elk pad moet hetzelfde antwoord opleveren.

Eerst benaderen we de limiet over de *y*-as (dus $x=0$):

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{0+y^2} = 0.$$

Vervolgens benaderen we de limiet over de lijn $y=x^2$, dus over (x,x^2):

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,x^2) = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1.$$

Voor beide paden krijgen we een andere limietwaarde, dus de limiet bestaat niet.

b. Bereken de partiele afgeleiden f_x en f_y (voor $(x,y)\neq(0,0)$).

$f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, dus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4xy\cdot(x^4+y^2)-2x^2y\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}=\frac{-4x^5y+4xy^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2\cdot(x^4+y^2)-2x^2y\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x^6-2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

c. behoort niet tot de leerstof dit jaar.

4.a Bepaal de Taylor-ontwikkeling van $\cos x$ rondom $x=\pi$.
Om de Taylor-ontwikkeling te kunnen bepalen, bepalen we eerst de afgeleiden van $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(\pi) &= -1\\
f^{(1)}(x) &= -\sin x & f^{(1)}(\pi) &= 0\\
f^{(2)}(x) &= -\cos x & f^{(2)}(\pi) &= 1\\
f^{(3)}(x) &= \sin(x) & f^{(3)}(\pi) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(\pi) &= -1
\end{aligned}$$

De Taylor-ontwikkeling wordt daarmee

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\pi)\cdot(x-\pi)^n}{n!}=f(\pi)+\frac{f^{(1)}(\pi)}{1!}(x-\pi)+\frac{f^{(2)}(\pi)}{2!}+\ldots\\
&=-1+0+\frac{(x-\pi)^2}{2!}+0-\frac{(x-\pi)^4}{4!}+\ldots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

4.b. Bereken m.b.v. onderdeel (a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$.
Als we de Taylor-expansie van $f(x)=\cos x$ invullen krijgen we:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-1+\frac{(x-\pi)^2}{2!}-\frac{(x-\pi)^4}{4!}+\ldots}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)}{2!}-\frac{(x-\pi)^3}{4!}+\ldots=0.$$

Omdat zowel de teller als de noemer naar 0 gaat voor $n\to\infty$ kunnen we dit antwoord met l'Hospital controleren:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(1+\cos x)}{\frac{\partial}{\partial x}(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{1}=0.$$

Dus het antwoord klopt.

5. Beschouw de integraal

$$\iint_R (3x + 4y^2)\,dxdy$$

waarbij het integratie-gebied R **bestaat uit alle punten in het** xy**-vlak die voldoen aan** $y \geq 0$ **en** $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$**.**

Zie example 1 van paragraaf 15.4, pg. 1005.

6.a Los op: $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$**.**

Dit is een homogene differentiaalvergelijking. Om deze op te lossen bepalen we eerst de discriminant. We zien dat $(a,b,c) = (1,1,-2)$, dus $D = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$.

De discriminant is groter dan 0, dus de algemene oplossing wordt gegeven door:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 \cdot x} + c_2 e^{r_2 \cdot x}$$

Waarbij r_1 en r_2 gegeven worden door:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$

Dus $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

6.b. Los op: $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \sin(x)$**.**

Zie example 3 van paragraaf 17.2, pg. 1150.